CS 02 Spécialité maths **Mardi 21 nov 2023** **Gr Thiaude P.**
Calculatrice autorisée en mode EXAMEN **durée = 30 min**

<u>Exercice 1</u> [6 pts]
Calculer chacune des limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2+5}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x+3}}{x+3}$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{-4x+1}+\cos(7x^2+5)\right)$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{9x^2+4}-3x\right)$

<u>Exercice 2</u> [4 pts]
Pour tout réel x, on pose :

$$f(x)=\frac{\sin(x)}{e^x+2}+4$$

Déterminer la limite de f en $+\infty$, si elle existe.

<u>Exercice 3</u> [10 pts]
Dans l'espace muni d'un repère $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on donne $A(3;-1;4)$ et $B(1;2;3)$.

On note Δ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=7-10t \\ y=1+7t \\ z=3-2t \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$.

1. Les droite (AB) et Δ sont-elles parallèles ?

2. Donner une représentation paramétrique de (AB).

3. Les droites (AB) et Δ sont-elles sécantes ?
Dans l'affirmative donner les coordonnées de leur point d'intersection E.

4. La droite Δ coupe le plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ en F : calculer les coordonnées de F.

Corrigé
Exercice 1

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2+5}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2+5)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2+5} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0\ (cours)$, conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2+5} = 0$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x+3}}{x+3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x+3}}{x+3} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty\ (cours)$, conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x+3}}{x+3} = +\infty$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-4x+1}+\cos(7x^2+5)\right)$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-1\leqslant\cos(7x^2+5)\leqslant 1$, en ajoutant e^{-4x+1}, on obtient :

$$-1+e^{-4x+1}\leqslant\cos(7x^2-3)+e^{-4x+1}\leqslant 1+e^{-4x+1}$$

ou encore :

$$e^{-4x+1}-1\leqslant e^{-4x+1}+\cos(7x^2-3)\leqslant e^{-4x+1}+1$$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x+1)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-4x+1} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty\ (cours)$

Par limite d'une différence on en déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{-4x+1}-1)=+\infty$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-4x+1}+\cos(7x^2+5)\right)=+\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+4}-3x\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(9x^2+4)=+\infty$, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2+4}=\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty\ (cours)$$

Par limite d'une différence, on en déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+4}-3x\right)=+\infty$.

Exercice 2

$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\frac{\sin(x)}{e^x+2}+4$, **limite de f en $+\infty$**

Pour tout réel x, on a : $-1\leqslant\sin(x)\leqslant 1$ donc en divisant par $e^x+2>0$ on en déduit :

$$\frac{-1}{e^x+2}\leqslant\frac{\sin(x)}{e^x+2}\leqslant\frac{1}{e^x+2}$$
$$-\frac{1}{e^x+2}\leqslant\frac{\sin(x)}{e^x+2}\leqslant\frac{1}{e^x+2}$$

En ajoutant 4 à chaque membre :

$$-\frac{1}{e^x+2}+4\leqslant\frac{\sin(x)}{e^x+2}+4\leqslant\frac{1}{e^x+2}+4$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\ (cours)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+2)=+\infty$, puis : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x+2}=0$.

Par limite d'une somme on en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{e^x+2}+4\right]=4$.

De même, on montrerait que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{e^x+2}+4\right]=4$.

On a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{1}{e^x+2}+4\right]=4\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{e^x+2}+4\right]=4\\ \forall x\in\mathbb{R}, -\dfrac{1}{e^x+2}+4\leqslant\dfrac{\sin(x)}{e^x+2}+4\leqslant\dfrac{1}{e^x+2}+4\end{cases}$

donc d'après le théorème des gendarmes on en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\sin(x)}{e^x+2}+4\right]=4$.

Exercice 3

$(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ $A(3;-1;4)$ $B(1;2;3)$ $\Delta : \begin{cases} x = 7-10t \\ y = 1+7t \\ z = 3-2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

1. **Les droite (AB) et Δ sont-elles parallèles ?**

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1-3 \\ 2+1 \\ 3-4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, d'autre part $\vec{u}\begin{pmatrix} -10 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ.

Les droites (AB) et Δ sont parallèles si et seulement si un vecteur directeur de (AB) et un vecteur directeur de Δ, au choix, sont colinéaires autrement dit si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{u} = k\overrightarrow{AB}$.

On a :

$$\begin{cases} -10 = k \times (-2) \\ 7 = k \times 3 \\ -2 = k \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 5 \\ k = \dfrac{7}{3} \\ k = 2 \end{cases} \quad IMPOSSIBLE$$

Il n'existe pas $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\overrightarrow{AB}$ donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires, par conséquent les droites (AB) et Δ ne sont pas parallèles.

2. **Donner une représentation paramétrique de (AB).**

$A(3;-1;4) \in (AB)$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) donc une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x = 3-2\lambda \\ y = -1+3\lambda \\ z = 4-\lambda \end{cases}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. **Les droites (AB) et Δ sont-elles sécantes ? si oui coordonnées de leur point d'intersection E.**

Cherchons s'il existe $(\lambda, t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} 3-2\lambda = 7-10t \\ -1+3\lambda = 1+7t \\ 4-\lambda = 3-2t \end{cases}$.

On a les équivalences :

$$\begin{cases} 3-2\lambda = 7-10t \\ -1+3\lambda = 1+7t \\ 4-\lambda = 3-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2\lambda = 7-10t \\ -1+3\lambda = 1+7t \\ \lambda = 2t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2t+1 \\ 3-2\lambda = 7-10t \\ -1+3\lambda = 1+7t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2t+1 \\ 3-2(2t+1) = 7-10t \\ -1+3(2t+1) = 1+7t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2t+1 \\ 3-4t-2 = 7-10t \\ -1+6t+3 = 1+7t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2t+1 \\ 10t-4t = 7+2-3 \\ -1+3-1 = 7t-6t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2t+1 \\ 6t = 6 \\ 1 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2t+1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Il existe un tel couple (λ, t) donc les deux droites (AB) et Δ sont sécantes. En utilisant la représentation paramétrique de Δ, pour $t = 1$ on obtient : $\begin{cases} x = 7-10(1) = 7-10 = -3 \\ y = 1+7(1) = 1+7 = 8 \\ z = 3-2(1) = 3-2 = 1 \end{cases}$

(AB) et Δ sont sécantes en $\boldsymbol{E(-3;8;1)}$.

On peut pour vérifier utiliser la représentation paramétrique de (AB) en faisant $\lambda = 3$:

$$\begin{cases} x = 3-2(3) = 3-6 = -3 \\ y = -1+3(3) = -1+9 = 8 \\ z = 4-3 = 1 \end{cases}$$

On retrouve bien les coordonnées de E.

4. La droite Δ coupe le plan $(\boldsymbol{O};\vec{\boldsymbol{\imath}},\vec{\boldsymbol{\jmath}})$ en $\boldsymbol{F}$: calculer les coordonnées de $\boldsymbol{F}$.

Tout point du plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ a une cote nulle (et réciproquement) donc on cherche t tel que :

$$\begin{cases} x = 7 - 10t \\ y = 1 + 7t \\ 0 = 3 - 2t \end{cases}$$

On a les équivalences :

$$\begin{cases} x = 7 - 10t \\ y = 1 + 7t \\ 0 = 3 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{3}{2} \\ x = 7 - 10\left(\dfrac{3}{2}\right) \\ y = 1 + 7\left(\dfrac{3}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{3}{2} \\ x = 7 - 15 \\ y = 1 + \dfrac{21}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{3}{2} \\ x = -8 \\ y = \dfrac{23}{2} \end{cases}$$

On a donc finalement :

$$F\left(-8;\frac{23}{2};0\right)$$